

## A2: Unsicherheiten und Fehlerbetrachtung

PRAKTISCHE ÜBUNGEN IN PHYSIK FÜR MEDIZINER, ZAHNMEDIZINER UND BIOLOGEN

PHYSIKALISCHE ÜBUNGEN FÜR PHARMAZEUTEN

STAND: 27. SEPTEMBER 2018

### BESTIMMUNG DER MESSUNGSICHERHEIT EINES MESSERGEBNIS

Physikalische Messgrößen können prinzipiell nicht beliebig „genau“ genau bestimmt werden. Wie weit der Messwert  $x$  maximal vom tatsächlichen Wert abweichen sollte, wird durch die **absolute Messunsicherheit**  $\Delta x$  angegeben. Wie „fehlerbehaftet“ eine Messgröße ist, hängt dabei stark von der Vorgehensweise und von den verwendeten Apparaturen bei der Messung ab. Die Angabe der relativen Messunsicherheit  $\frac{\Delta x}{x}$  ist zwar erlaubt, im Praktikum aber selten sinnvoll.  $\Delta x$  kennzeichnet ein Intervall von  $x - \Delta x$  bis  $x + \Delta x$ , in dem die tatsächliche Größe liegen sollte. Dieses wird allerdings nie explizit angegeben, sondern immer nur in der **Kurzschreibweise**  $x \pm \Delta x$ .

### MAXIMALWERTABSCHÄTZUNG

Die im Praktikum **mindestens** durchgeführte Fehlerfortpflanzung geht von der ungünstigsten Annahme aus, dass alle auftretenden Messunsicherheiten das Messergebnis mit ihrem vollen Betrag verfälschen und sich nicht gegenseitig kompensieren können („Maximalwertabschätzung“). Diese Annahme ist in der Regel falsch und resultiert prinzipiell in zu großen Fehlerabschätzungen. Die allgemeine Regel, aus denen diese elementaren Regeln abgeleitet werden können, lautet für eine Größe  $z$ , die funktional von  $x$  und  $y$  abhängt ( $z(x, y)$ ):

$$\Delta z(x, y) = \left| \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \right| \Delta x + \left| \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \right| \Delta y \quad (1)$$

Hierbei ist  $\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y$  die Ableitung der Funktion  $z(x, y)$  nach der Variablen  $x$  alleine, wenn  $y$  konstant bleibt (partielle Ableitung).

Angewendet auf einfache Beispiele ergibt sich dann:

1. Ist

$$z = x + y \quad \text{oder} \quad z = x - y,$$

so folgt

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \quad (2)$$

2. Ist

$$z = x \cdot y \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y},$$

so folgt

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \quad (3)$$

Die Gleichungen 2 und 3 gelten auch für Summen (Differenzen) respektive Produkte (Quotienten) aus mehr als zwei Messgrößen sinngemäß. Die Fehlerfortpflanzung ist dann schrittweise zu verfolgen.

### ABSCHÄTZUNG BEI TEILWEISER KOMPENSATION DER MESSUNSICHERHEITEN

Beim Zusammenwirken mehrerer Einzelunsicherheiten können diese sich jedoch auch teilweise kompensieren. Dies beschreibt die **Gaußsche Fehlerfortpflanzung**, welche die **meistens** im Praktikum verwendete Methode ist. Die zugrundeliegende allgemeine Regel lautet hierbei:

$$\Delta z = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \Delta x\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \Delta y\right]^2} \quad (4)$$

Für einfache Zusammenhänge ergeben sich ähnlich elementare Regeln wie bereits bei der Maximalwertabschätzung:

1. Ist

$$z = x + y \quad \text{oder} \quad z = x - y ,$$

so folgt

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

2. Ist

$$z = x \cdot y \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y} ,$$

so folgt

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

### MESSUNSICHERHEITEN BEI MESSREIHEN (STATISTISCHE BEHANDLUNG DER DATEN)

Die statistische Auswertung einer Messreihe kann vorgenommen werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Messgröße wurde mehrmals unter den gleichen Versuchsbedingungen bestimmt.
- Systematische Messabweichungen sind korrigierbar oder vernachlässigbar.
- Die Messwerte streuen zufällig um einen Erwartungswert.

Solches trifft z.B. für alle Messgrößen, denen eine statistische Natur zugrunde liegt, zu (radioaktive Zerfälle etc.). Wurde eine Messung mehrmals ( $n$ -mal) durchgeführt, so streuen die  $n$  Einzelergebnisse  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  um den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (5)$$

Ihre Häufigkeitsverteilung ist bei genügend großer Zahl  $n$  von Messungen eine GAUSSSche Glockenkurve mit dem Maximum in  $\bar{x}$ . Ein Maß für die Breite der Verteilungskurve ist die **Standardabweichung**  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (6)$$

Hierbei ist die Größe  $x_i - \bar{x}$  die Abweichung der  $i$ -ten Einzelmessung vom Mittelwert. Das Quadrat der Standardabweichung, d.h.  $\sigma^2$ , heißt **Varianz**. Für den statistischen Fehler des Mittelwertes  $\delta x$  (= mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwertes) gilt:

$$\delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (7)$$

Die Angabe des statistischen Fehlers bedeutet, dass der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% im Intervall  $\bar{x} \pm \delta x$  liegt. Über die Streuung der Messergebnisse macht er keine Aussagen. Die Größe  $\delta x$  stellt den **absoluten** statistischen Fehler nach  $n$  Messungen dar. Der **relative** Fehler ist  $\delta x / \bar{x}$ .

Durch wiederholte Messung ändert sich dabei weder der Mittelwert noch die Häufigkeitsverteilung der Messergebnisse. Durch den statistischen Fehler des Mittelwertes kann nur eine Aussage getroffen werden, in welchem Bereich um den experimentellen Mittelwert der tatsächliche („wahre“) Mittelwert erwartet wird.